

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Щербакова Елена Сергеевна
Должность: Ректор
Дата подписания: 30.12.2020 16:08:41
Уникальный программный ключ:
28049405e27773754b421c0f7cbfa26b49543c95674999bee5f5fb252f9416b



**Частное образовательное учреждение высшего образования
Тульский институт управления и бизнеса имени Никиты Демидовича Демидова**

**Кафедра
«Педагогика, психологии, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин»**

Заведующий кафедрой ППГиЕНД

Кадисон Ю.Б.
«30» января 2019 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Укрупненная группа направлений и специальностей	38.00.00 Экономика и управление
Направление	38.03.01 Экономика
Профиль	Экономика предприятий и организаций
Форма обучения	Заочная, очная

Тула
2019 год

Цель изучения дисциплины «Математический анализ» заключается в формировании у студентов математической культуры и логического мышления, выработки представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умения логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

В результате выполнения контрольной работы по дисциплине «Математика» студенты должны:

Знать:

1. Теоретические основы теории множеств и числовых последовательностей;
2. Основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных;
3. Основные понятия теории числовых и функциональных рядов; способы исследования рядов на сходимость и разложения функции в ряд;
4. Основные методы решения дифференциальных уравнений.

Уметь:

1. Применять теорию числовых последовательностей и рядов в исследовании рядов на сходимость;
2. Исследовать функцию одной переменной и строить её график с помощью пределов, дифференциального и интегрального исчисления;
3. Находить функцию по данным её производным 1-го и 2-го порядка с помощью дифференциальных уравнений;
4. Исследовать функцию нескольких переменных на экстремум и находить её наибольшее и наименьшее значения;
5. Грамотно интерпретировать полученные решения задач применительно к финансово-экономическим условиям.

Владеть:

1. Методами решений типовых задач с применением теории пределов числовых последовательностей и функции одной переменной;
2. Основными методами дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных;
3. Основами теории дифференциальных уравнений;
4. Навыками решения финансово-экономических задач с помощью математического аппарата.

Выполнение контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» направлено на формирование у студента следующих компетенций:

ОПК-2 - способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач;

ПК-1 - способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-2 - способностью на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-3 - способностью выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами.

ТРЕБОВАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.

Контрольная работа, как одна из форм оценки уровня подготовки студентов заочного отделения, ставит своей целью закрепление теоретических знаний, полученных студентами в процессе изучения данной дисциплины, и навыков решения типовых организационно-управленческих задач математическими, статистическими и количественными методами в современных условиях.

Работа должна быть выполнена в машинописном виде на бумаге форматом А4 (210x297 мм). Текст должен располагаться на одной стороне листа. Поля: слева страницы – 30 мм, справа – 10 мм, сверху и снизу – по 20 мм. Машинописный текст набирается на компьютере шрифтом Times New Roman размером 14 pt через 1,5 интервала.

Задания должны быть пронумерованы и выполнены по порядку. В работе можно применять общепринятые условные сокращения.

Формулы следует набирать или в редакторе формул Microsoft Equation 3.0 или с помощью меню «Вставка» - Формула.

Размеры: обычный – 14 pt; крупный индекс – 12 pt; мелкий индекс – 10 pt; крупный символ – 16 pt; мелкий символ – 8 pt. Шрифты: Times New Roman - для стилей Текст, Функция, Переменная, Матрица-вектор, Переменная; Symbol - для стилей Греческие и Символ. Для стиля Переменная следует выбрать наклонное начертание, для стиля Матрица-вектор - полужирное. Расшифровка формульных обозначений дается в тексте после слова «где» без абзацного отступа, т.е. в «подбор».

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{n \cdot k}, k = 0, \dots, N-1$$

Общий объем работы должен составлять 10-15 страниц машинописного текста. Нумерация всех страниц работы должна быть сквозной, порядковой, начиная с титульного листа, на котором номер страницы не проставляется, и заканчивая приложением включительно.

Титульный лист является первым листом контрольной работы (нумерация на этом листе не проставляется). Титульный лист должен содержать все установленные реквизиты: наименование учебного заведения, кафедры; наименование дисциплины; номер варианта; курс, группу, фамилию, имя, отчество исполнителя контрольной работы; фамилию, имя, отчество, учёную степень и ученое звание научного руководителя; год выполнения работы.

Содержание (оглавление) является вторым листом работы. Содержание включает перечень всех задач работы.

Слово «Содержание» записывают в виде заголовка симметрично тексту прописными (заглавными) буквами.

Контрольная работа должна обязательно содержать решения всех заданий. Задача должна начинаться с указания номера, затем пишется условие. После условия должно следовать подробное решение задачи. В конце задачи нужно писать ответ.

Список литературы отражает степень изученности студентом решаемых задач.

1. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ И ОБРАЗЕЦ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

Задача 1

Найти предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}$$

Решение

Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись свойствами степеней:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 9 \cdot 3^n}{16 \cdot 4^n + 5}$$

Вынося за скобки наибольшее слагаемое в числителе дроби и в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей, учитывая: для любого числа **a**

такого, что $|a| < 1$, справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 9 \cdot 3^n}{16 \cdot 4^n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n \left(1 + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)}{16 \cdot 4^n \left(1 + \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)} = \frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задача 2

Вычислить предел функции с использованием основных теорем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3xe^{2-x}}{3x^2 + \ln(x-2) + 4}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3xe^{2-x}}{3x^2 + \ln(x-2) + 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot 2 \cdot e^{2-2}}{3 \cdot 2^2 + \ln(2-2) + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 \cdot e^0}{12 + \ln 0 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 \cdot 1}{12 - \infty + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Задача 3

Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt{3} - 2 \cos x}{\cos 3x}$.

Решение

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, приведем данный предел к первому замечательному, для этого сделаем замену переменной $x - \pi / 6 = y$, тогда $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} - 2 \cos(y + \pi / 6)}{\cos 3(y + \pi / 6)} =$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(y + \pi / 6)\right)}{\cos(3y + \pi / 2)} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \pi / 6 - \cos(y + \pi / 6)}{-\sin 3y} =$$

$$2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \pi / 6 \cdot \sin(-y / 2)}{-\sin 3y} = -2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y / 2 \cdot \sin(y / 2) \cdot 3y}{y / 2 \cdot \sin 3y \cdot 3y} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задача 4

Найти производную сложной функции $y = (ax^4 + \ln x)(d^3\sqrt{x} - a^x)$.

Решение

$$y' = (ax^4 + \ln x)'(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x) + (ax^4 + \ln x)(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x)';$$

$$(ax^4 + \ln x)'(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x) = \left(4ax^3 + \frac{1}{x}\right)(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x);$$

$$(ax^4 + \ln x)(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x)' = (ax^4 + \ln x) \left(\frac{d^3}{2\sqrt{x}} - a^x \ln a\right);$$

Ответ: $y' = \left(4ax^3 + \frac{1}{x}\right)(d^3 \cdot \sqrt{x} - a^x) + (ax^4 + \ln x) \left(\frac{d^3}{2\sqrt{x}} - a^x \ln a\right)$.

Задача 5

Найти производную n-го порядка функции $y = 3^{2x+1}$.

Решение.

Вычислим последовательно несколько производных, начиная с производной первого порядка: $y' = (3^{2x+1})' = 3^{2x+1} \cdot \ln 3(2x+1)' = 3^{2x+1} \cdot 2 \ln 3$,

$$y'' = (y')' = (3^{2x+1} \cdot 2 \ln 3)' = (3^{2x+1})' \cdot 2 \ln 3 = 3^{2x+1} \cdot 2^2 \ln^2 3,$$

$$y''' = (y'')' = (3^{2x+1} \cdot 2^2 \ln^2 3)' = (3^{2x+1})' \cdot 2^2 \ln^2 3 = 3^{2x+1} \cdot 2^3 \ln^3 3.$$

Отсюда видно, что производная n-го порядка выражается формулой:

$$y^{(n)} = (3^{2x+1})^{(n)} = 3^{2x+1} \cdot 2^n \ln^n 3.$$

Ответ: $y^{(n)} = 3^{2x+1} \cdot 2^n \ln^n 3$.

Задача 6

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале $[-2; 2]$

$$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$$

Решение

1. Находим первую производную заданной функции

$$y' = 5x^4 - 5x^2$$

2. Определяем критические точки первого рода:

$$5x^4 - 5x^2 = 0, \text{ откуда: } x_1 = -1, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 1..$$

1. Подвергаем эти точки дополнительному исследованию:

x	- 2	(- 2; - 1)	-1	(- 1; 0)	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2
Знак $f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
Величина $f(x)$	$-\frac{50}{3}$		$\frac{8}{3}$		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{82}{3}$
Экстремум			<i>M</i>		<i>T.П.</i>		<i>m</i>		

$$\max_{[-2; 2]} f(2) = \frac{82}{3};$$

$$\min_{[-2; 2]} f(-2) = -\frac{50}{3}.$$

Ответ: В данном случае глобальные экстремумы не совпадают ни с одним из локальных экстремумов.

Задача 7

Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с использованием правила Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}} &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0^2 + 1} - 1}{\sqrt{0 + 3} - \sqrt{3}} = \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x + 3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2\sqrt{x + 3}}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 0 \cdot \sqrt{0 + 3}}{\sqrt{0^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Задача 8

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = -\frac{1}{4} (x^3 - 3x^2 + 4)$$

Решение:

1. Область определения функции – вся числовая прямая, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2. Точки пересечения с осями координат:

$$Ox : -\frac{1}{4} (x^3 - 3x^2 + 4) = 0, \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2, \text{ точки } (-1, 0), (2, 0).$$

$$Oy : x = 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{4} (0 - 0 + 4) = -1, \text{ точка } (0, -1).$$

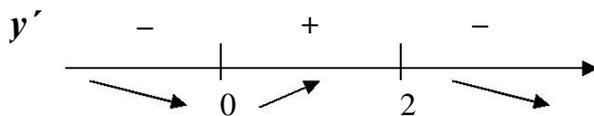
3. Функция общего вида, так как

$$y(-x) = -\frac{1}{4} ((-x)^3 - 3(-x)^2 + 4) = -\frac{1}{4} (-x^3 - 3x^2 + 4) \neq \pm y(x)$$

4. Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = -\frac{1}{4} (x^3 - 3x^2 + 4)' = -\frac{1}{4} (3x^2 - 6x) = -\frac{3}{4} x(x - 2)$$
$$y'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} x(x - 2) = 0$$

Находим критические точки: $x_1 = 0, x_2 = 2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция убывает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, возрастает на интервале $(0; 2)$.

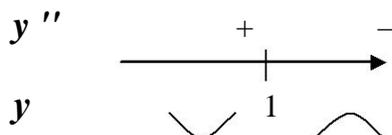
Функция имеет минимум в точке $x = 0, y(0) = -1$,

функция имеет максимум в точке $x = 2, y(2) = 0$

5. Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = -\frac{3}{4} (x^2 - 2x)' = -\frac{3}{2} (x - 1)$$

Находим критические точки: $y''(x) = 0: x = 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.

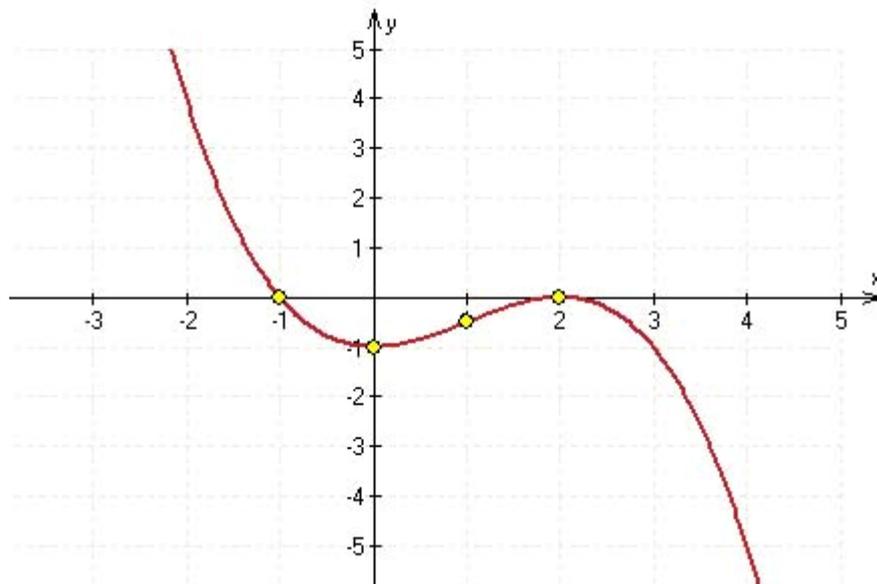


Функция выпукла вверх на интервале $(1; +\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-\infty; 1)$.
Точка перегиба: $x = 1$, $y(1) = -0,5$.

6. Асимптоты.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 4/x) = -\infty$,
асимптот нет.

7. Строим график функции, отметим ключевые точки:



Задача 9

Вычислить приближенно значение $\sqrt{5}$.

Решение.

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, тогда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

Следовательно, $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x \Rightarrow \sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$. (*)

Полагая $5 = 4 + 1$ ($x = 4$, $\Delta x = 1$), и применяя формулу (*), имеем:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$$

Ответ: 2,25

Задача 10

Вычислить эластичность функции $y = 5 - \frac{0,05}{x^2}$, в точке $x = 3$.

Решение:

1. Находим производную заданной функции:

$$y' = -\frac{0,1}{x^3}.$$

2. Находим отношение x/y :

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{5 - \frac{0,05}{x^2}} = \frac{x^3}{5x^2 - 0,05}.$$

3 Определяем эластичность функции:

$$E = \frac{x}{y} y' = \frac{x^3}{5x^2 - 0,05} \cdot \left(-\frac{0,1}{x^3}\right) = \frac{-0,1}{5x^2 - 0,05} = \frac{1}{0,5 - 50x^2}.$$

4. Вычисляем эластичность функции в точке $x = 3$:

$$E_{x=3} = \frac{1}{0,5 - 50x^2} = \frac{1}{0,5 - 50 \cdot 3^2} = -0,0206.$$

Ответ: увеличение независимой переменной x на 1% приведет к уменьшению функции y на 2,06% при $x = 3$.

Задача 11

Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int 5^{\sin x} \cos x dx$.

Решение

$$\int 5^{\sin x} \cos x dx = \int 5^{\sin x} d \sin x = \int 5^u du = \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{\sin x}}{\ln 5} + C$$

Задача 6

Найти интеграл от рациональной дроби $\int \frac{6x - 1}{x^2 - 6x + 8} dx$

Решение:

1. Выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2 \cdot 3x + (3)^2 - (3)^2 + 8 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2) - 1 = (x - 3)^2 - 1,$$

2. Представляем квадратный многочлен в виде произведения двух сомножителей:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

3. Исходный интеграл приводим к виду:

$$\int \frac{6x - 1}{x^2 - 6x + 8} dx = \int \frac{6x - 1}{(x - 4)(x - 2)} dx$$

4. Разлагаем подынтегральное выражение на сумму элементарных дробей

$$\frac{6x-1}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-4)(x-2)}.$$

$$\begin{cases} 6 = A + B \\ -1 = -4A - 2B \end{cases},$$

$$+ \begin{cases} 24 = 4A + 4B \\ -1 = -4A - 2B \end{cases}.$$

$$\underline{23 = 2B}$$

Откуда следует $B = 11,5$, $A = -5,5$, а исходный интеграл принимает вид суммы табличных интегралов:

$$\int \frac{6x-1}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{6x-1}{(x-4)(x-2)} dx = \int \frac{-5,5}{x-4} dx + \int \frac{11,5}{x-2} dx.$$

5. Записываем решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^2-6x+8} dx &= -5,5 \int \frac{d(x-4)}{x-4} + 11,5 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \\ &= -5,5 \ln|x-4| + 11,5 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Ответ: $-5,5 \ln|x-4| + 11,5 \ln|x-2| + C$.

Задача 12

Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям

$$\int_0^3 (x+1)e^x dx$$

Решение:

$$\int_0^3 (x+1)e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = (x+1)e^x \Big|_0^3 - \int_0^3 e^x dx =$$

$$= [(x+1)e^x - e^x] \Big|_0^3 = e^x(x+1-1) \Big|_0^3 = xe^x \Big|_0^3 = 3 \cdot e^3 - 0 \cdot e^0 = 3e^3.$$

Ответ: $3e^3$.

Задача 13

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

Решение:

Это интеграл с бесконечным верхним и нижним пределами интегрирования, поэтому записываем его в виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e^0) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^{-\infty}) \\ &+ \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{\infty} - e^0) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - 0) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\infty - 1) = 1 - 0 + \infty - 1 = 1 + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Итак, второй интеграл расходится (равен ∞), а, следовательно, расходится весь интеграл, то есть этот интеграл не существует.

Задача 14

Решить линейное дифференциальное уравнение

$$y' \cos x = \frac{y}{\ln y}.$$

Решение

1. Записываем уравнение с разделяющимися переменными в стандартной форме, то есть разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx} \cos x = \frac{y}{\ln y} \quad \rightarrow \quad \frac{\ln y dy}{y} = \frac{dx}{\cos x}.$$

2. Выполняем почленное интегрирование, полученного уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{\ln y dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos x} + C \quad \rightarrow \quad \int \ln y d(\ln y) = \int \frac{dx}{\cos x} + C.$$

Откуда получим с учетом того, что второй интеграл табличный, окончательное решение:

$$\frac{1}{2} \ln^2 y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C_1,$$

или в равноценном виде:

$$\ln y = \sqrt{2 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C}.$$

Задача 15

Найти и проверить решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' - 8y = x^2$.

Решение

1. Записываем однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному $y'' + 2y' - 8 = 0$.

2. Записываем характеристическое уравнение однородного уравнения

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

3. Решаем это квадратное уравнение

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2},$$

откуда $k_1 = -4$, $k_2 = 2$.

4. Записываем общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}.$$

5. Частное решение заданного неоднородного уравнения ищем в форме многочлена вида

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C,$$

так как корни характеристического уравнения не равны нулю ($r = 0$), а многочлен должен быть полным.

6. Для нахождения неизвестных коэффициентов A , B и C подставляем частное решение \tilde{y} и его производные в заданное неоднородное уравнение. Подстановку производим, записывая уравнение в обратной последовательности:

$$x^2 = -8y + 2y' + y''$$

$$x^2 = -8(Ax^2 + Bx + C) + 2(2Ax + B) + 2A.$$

Далее группируем слагаемые правой части равенства по степеням x

$$x^2 = x^2(-8A) + x(-8B + 4A) + (-8C + 2B + 2A)$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства

$$\begin{cases} 1 = -8A, \\ 0 = -8B + 4A, \\ 0 = -8C + 2B + 2A, \end{cases}$$

Решая, получившуюся систему уравнений, имеем:

$$A = -1/8, \quad B = -1/16, \quad C = -3/64.$$

7. Записываем частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} - \frac{3}{64} = -\frac{8x^2 + 4x + 3}{64}$$

8. Записываем общее решение неоднородного уравнения, складывая общее решение для однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения:

$$Y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - (8x^2 + 4x + 3)/64.$$

$$\begin{aligned} x^2 = -8y + 2y' + y'' &= -8\left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \frac{8x^2 + 4x + 3}{64}\right) + \\ &+ 2\left(-4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x} - \frac{16x + 4}{64}\right) + \left(16C_1 e^{-4x} + 4C_2 e^{2x} - \frac{16}{64}\right) = \\ &= \cancel{-8C_1 e^{-4x}} - \cancel{8C_2 e^{2x}} + \frac{8x^2 + 4x + 3}{8} - \cancel{8C_1 e^{-4x}} + \cancel{4C_2 e^{2x}} - \frac{16x + 4}{32} + \cancel{16C_1 e^{-4x}} + \\ &+ \cancel{4C_2 e^{2x}} - \frac{1}{4} = \frac{8x^2 + 4x + 3}{8} - \frac{16x + 4}{32} - \frac{1}{4} = \frac{32x^2 + 16x + 12 - 16x - 4 - 8}{32} = x^2 \end{aligned}$$

В результате проверки получено тождественное равенство $x^2 \equiv x^2$, следовательно, уравнение решено верно.

Проверить сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, используя признаки сходимости Даламбера или Коши.

Решение

Воспользуемся признаком сходимости Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 3^n n! (n+1)}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} = \frac{3}{2,7128} = 1,106 > 1$$

Ответ: так как признак сходимости рядов Даламбера оказался больше единицы, то заданный ряд расходится.

Задача 17

Установить абсолютную или условную сходимость знакпеременного ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots \quad (1)$$

Решение

1. Составим ряд из абсолютных величин: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ (2) - ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем: $q = \frac{1}{2} < 1$, следовательно ряд (2) сходится.

2. Так как для ряда (2) выполняется: $u_{n+1} < u_n$ и он сходится, то ряд (1) сходится абсолютно.

Ответ: данный ряд сходится абсолютно.

Задача 18

Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$

Решение:

Составим ряд из модулей членов заданного ряда, то есть с общим членом

$$u_n = \frac{|x|^n}{4^n}$$

Получаем ряд с положительными членами и исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера.

Для предела нам еще нужен следующий член ряда

$$u_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{4^{n+1}}$$

Подставляем члены ряда в предел и вычисляем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{4^{n+1} \cdot |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot |x|^{n+1}}{4^n \cdot 4 \cdot |x|^n} = \frac{|x|}{4}.$$

При пределе меньшем единицы $\frac{|x|}{4} < 1$ - ряд убывает по признаку Даламбера.

Из этого условия находим $|x| < 4 \rightarrow -4 < x < 4$ - область сходимости в виде ограничений переменной.

Ответ: $R=4$ - радиус сходимости ряда и его область сходимости $x \in (-4; 4)$

Задача 19

Вычислить полный дифференциал функции нескольких переменных

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Решение

1. Вычислим частные производные функции двух переменных:

$$f'_x = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{(x^2 + y^2)},$$

$$f'_y = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{(x^2 + y^2)},$$

2. Находим полный дифференциал по формуле: $dF(x, y) = f'_x dx + f'_y dy$

$$dF(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)} dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)} dy = \frac{2(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)}$$

Ответ: $dF(x, y) = \frac{2(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)}$

Задача 20

Определить экстремум функции двух переменных

$$z = -4x - 5y + x^2 + xy + y^2.$$

Решение

1. Находим первые частные производные заданной функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -4 + 2x + y; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -5 + x + 2y. \end{cases}$$

2. Приравниваем производные к нулю и переносим свободные члены вправо:

$$\begin{cases} 2x + y = 4; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

3. Решаем эту систему методом Гаусса (методом вычитания, предварительно умножив первое произведение на 2) и получаем:

$$3x = 3 \rightarrow x = 1, \quad y = 4 - 2x = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Итак, критической точкой является точка с координатами (1, 2).

4. Находят вторые производные от заданной функции:

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2. \end{cases}$$

5. Вычисляем определитель матрицы вторых производных:

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0,$$

Отсюда следует, что в критической точке функция имеет экстремум ($\Delta > 0$), при этом минимум функции ($A > 0$).

6. Вычисляем величину минимума функции в точке с координатами (1, 2):

$$z_{\min} = -4x_0 - 5y_0 + x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = -4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 = -7.$$

Ответ: функция имеет точку минимума с координатами (1; 2), при этом значение функции $z_{\min} = -7$.

Образец оформления титульного листа

Частное образовательное учреждение высшего образования
Тульский институт управления и бизнеса
имени Никиты Демидовича Демидова
(ЧОУ ВО ТИУБ им. Н.Д. Демидова)

Кафедра «ППГиЕНД»

Контрольная работа

по дисциплине: «Математический анализ»

на тему:

«Технология обработки текстовой информации с использованием текстового процессора MS Word»

группа _____

Выполнил: _____
(подпись студента) _____
(ФИО студента)

Проверил: _____
(подпись преподавателя) _____
(ФИО преподавателя)

Тула, 2019